UNIVERSITAS
GADJAH MADA

Matematika Penilaian

Agung Sugiarto.,MM.,M.Ec.Dev.,Ak.,CA.,CPA.,MAPPI (Cert)

S-03329

Pendahuluan

- Untuk dapat melakukan penilaian atas property, penguasaan konsep dan aplikasi matematika dasar (nilai waktu dari uang/*time value of money*) merupakan keharusan bagi seorang Penilai.
- Prinsip dasar dalam konsep nilai waktu dari uang adalah ***opportunity cost***: premis dasarnya adalah, kondisi saat ini merupakan kondisi yang "*most probable*" untuk dapat kita manfaatkan dan kelola utk mendapatkan keuntungan maksimal.
- Masa depan adalah *uncertainty* → ada potensi *loss*, sehingga dikenal mekanisme diskonto/*discounted*.

Konsep Dasar

- Jika nilai nominalnya sama, uang yang dimiliki saat ini lebih berharga daripada uang yang akan diterima di masa yang akan datang
- Lebih baik menerima Rp 1 juta sekarang daripada menerima uang yang sama 1 tahun lagi
- Lebih baik membayar Rp 1 juta 1 tahun lagi daripada membayar uang yang sama sekarang

6 Rumus Utama

1. Nilai yang akan datang (*future value*)
2. Nilai sekarang (*present value*)
3. Nilai yang akan datang dari anuitas (*future value of an annuity*)
4. Nilai sekarang dari anuitas (*present value of an annuity*)
5. Anuitas – angsuran hutang (*mortgage constant*)
6. Anuitas – cadangan penggantian (*sinking fund*)

Nilai yang Akan Datang

- Uang Rp 1.000, ditabung dengan tingkat bunga 10% per tahun
- Setelah 1 tahun, uang tsb akan menjadi:

  Rp 1.000 + (10% x Rp 1.000) = Rp 1.100
- Setelah 2 tahun, uang tsb akan menjadi:

  Rp 1.100 + (10% x Rp 1.100) = Rp 1.210

  Catatan: bunga tahun pertama ditambahkan ke pokok tabungan (bunga majemuk)
- Setelah 3 tahun, uang tsb akan menjadi:

  Rp 1.210 + (10% Rp 1.210) = Rp 1.331
- Dan seterusnya…

Nilai yang Akan Datang

- Jika…
  - *P* = uang tabungan/investasi awal
  - *i* = tingkat bunga
  - *n* = periode menabung/investasi
  - *F* = uang yg akan diterima di akhir periode
- Maka…

$$F = P \times \boxed{(1+i)^n}$$

Future value factor

Nilai yang akan datang (*F*) = jumlah yang akan terakumulasi dari investasi sekarang untuk *n* periode pada tingkat bunga *i*

Nilai yang Akan Datang

- Jika bunga diperhitungkan setiap 6 bulan (½ tahun), maka:

$$F = P \times \left(1 + \frac{i}{2}\right)^{n \times 2}$$

- Jika bunga diperhitungkan setiap 3 bulan (triwulan), maka:

$$F = P \times \left(1 + \frac{i}{4}\right)^{n \times 4}$$

- Jika bunga diperhitungkan setiap bulan, maka:

$$F = P \times \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{n \times 12}$$

Nilai yang Akan Datang

- Jika tingkat bunga berubah-ubah (thn ke-1 = 10%, thn ke-2 = 12%, thn ke-3 = 14%), maka nilai dari uang Rp 1.000 yg diterima sekarang pd akhir thn ke-3 adalah...

$$F = 1.000 \times (1+10\%)^1 \times (1+12\%)^1 \times (1+14\%)^1$$
$$= 1.404$$

- Jika tingkat bunga thn ke-1 = 10%, thn ke-2 = 12%, thn ke-3 s/d ke-5 = 14%), maka nilai dari uang Rp 1.000 yg diterima sekarang pada akhir thn ke-5 adalah...

$$F = 1.000 \times (1+10\%)^1 \times (1+12\%)^1 \times (1+14\%)^3$$
$$= 1.825$$

Nilai Sekarang

- Kebalikan dari nilai yang akan datang
- Rumus diturunkan dari rumus nilai yang akan datang:

$$F = P \times (1+i)^n$$

$$P = F \times \boxed{\frac{1}{(1+i)^n}}$$

Present value factor/ discount factor

Discount rate

- Nilai sekarang (*P*) = nilai sekarang dr suatu jumlah di masa depan yang akan diterima di akhir periode *n* pada tingkat bunga *i*

Nilai Sekarang

- Jika diketahui tingkat bunga thn ke-1 = 10%, thn ke-2 = 12%, dan thn ke-3 = 14%, maka nilai sekarang dari uang Rp 1.404 yg akan diterima 3 thn dari sekarang adalah…

$$P = 1.404 \times \frac{1}{(1+10\%)^1} \times \frac{1}{(1+12\%)^1} \times \frac{1}{(1+14\%)^1}$$
$$= 1.000$$

- Jika diketahui tingkat bunga thn ke-1 = 10%, thn ke-2 = 12%, dan thn ke-3 s/d ke-5 = 14%, maka nilai sekarang dari uang Rp 1.825 yg akan diterima 5 thn dari sekarang adalah…

$$P = 1.825 \times \frac{1}{(1+10\%)^1} \times \frac{1}{(1+12\%)^1} \times \frac{1}{(1+14\%)^3}$$
$$= 1.000$$

Nilai yang Akan Datang dari Anuitas

- Anuitas = sejumlah uang yang dibayar atau diterima secara periodik dengan jumlah yg sama dalam jangka waktu tertentu
- Sifat anuitas:
  - Jumlah pembayaran tetap/sama (*equal payments*)
  - Jarak periode antar angsuran sama (*equal periods between payments*)
  - Pembayaran pertama dilakukan pada akhir periode pertama (*in arrears*)

Nilai yang Akan Datang dari Anuitas

Uang Rp 1.000 diterima secara rutin (tiap akhir tahun) selama 4 tahun, semuanya ditabung dengan tingkat bunga 10% per tahun:

- Pada akhir tahun ke-4, uang yang diterima pada akhir tahun ke-1 akan menjadi:

  Rp 1.000 x $(1 + 10\%)^3$ = Rp 1.331

- Pada akhir tahun ke-4, uang yang diterima pada akhir tahun ke-2 akan menjadi:

  Rp 1.000 x $(1 + 10\%)^2$ = Rp 1.210

- Pada akhir tahun ke-4, uang yang diterima pada akhir tahun ke-3 akan menjadi:

  Rp 1.000 x $(1 + 10\%)^1$ = Rp 1.100

- Pada akhir tahun ke-4, uang yang diterima pada akhir tahun ke-4 akan menjadi:

  Rp 1.000 x $(1 + 10\%)^0$ = Rp 1.000

  Catatan: uang tersebut belum sempat dibungakan (karena diterima di akhir tahun)

Nilai yang Akan Datang dari Anuitas

- Dengan demikian, pada akhir tahun ke-4, jumlah seluruh uang yang diterima akan menjadi:

  Rp 1.331 + Rp 1.210 + Rp 1.100 + Rp 1.000 = **Rp 4.641**

- Yang dimaksud dengan nilai yang akan datang dari anuitas adalah jumlah keseluruhan uang tersebut (Rp 4.641)

Nilai yang Akan Datang dari Anuitas

- Jika...
  - S_n = nilai yg akan datang dr anuitas selama n periode
  - A = anuitas
- Maka...

$$S_n = A \times \boxed{\frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

Future value annuity factor

Nilai yg akan datang dr anuitas (S_n) = akumulasi nilai dari pembayaran periodik selama n periode pada tingkat bunga i

Nilai yang Akan Datang dari Anuitas

- Nilai yang akan datang dari anuitas Rp 1.000 yang diterima tiap akhir tahun selama 4 tahun, semuanya ditabung dengan tingkat bunga 10% per tahun, adalah (dengan rumus)...

$$
\begin{aligned}
S_4 &= 1.000 \times \frac{(1+10\%)^4 - 1}{10\%} \\
&= 1.000 \times \frac{0,4641}{10\%} \\
&= 4.641
\end{aligned}
$$

- Jika jumlah uang dan/atau tingkat bunga berubah-ubah, rumus tersebut tidak dpt digunakan (hrs dihitung satu per satu dgn rumus nilai yang akan datang)

Nilai Sekarang dari Anuitas

- Uang Rp 1.000 diterima secara rutin (tiap akhir tahun) selama 4 tahun mendatang, semuanya didiskonto dengan tingkat diskonto 10% per tahun
- Nilai sekarang uang yang akan diterima pada akhir tahun ke-1 adalah:

$$P = 1.000 \times \frac{1}{(1+10\%)^1} = 909$$

- Nilai sekarang uang yang akan diterima pada akhir tahun ke-2 adalah:

$$P = 1.000 \times \frac{1}{(1+10\%)^2} = 826$$

Nilai Sekarang dari Anuitas

- Nilai sekarang uang yang akan diterima pada akhir tahun ke-3 adalah:

$$P = 1.000 \times \frac{1}{(1+10\%)^3} = 751$$

- Nilai sekarang uang yang akan diterima pada akhir tahun ke-4 adalah:

$$P = 1.000 \times \frac{1}{(1+10\%)^4} = 683$$

- Dengan demikian, jumlah nilai sekarang dari seluruh uang yang diterima (anuitas) adalah:

Rp 909 + Rp 826 + Rp 751 + Rp 683 = Rp 3.170

Nilai Sekarang dari Anuitas

- Jika…
  - *P* = nilai sekarang dr anuitas yg diterima selama *n* periode
- Maka…

$$P = A \times \boxed{\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i}}$$

Present value annuity factor

Nilai sekarang dr anuitas (*P*) = nilai sekarang dari sejumlah pembayaran dengan jumlah tetap yang akan diterima tiap akhir periode selama *n* periode pada tingkat bunga *i* per periode

Nilai Sekarang dari Anuitas

- Nilai sekarang dari anuitas Rp 1.000 yang akan diterima tiap akhir tahun selama 4 tahun mendatang, semuanya didiskonto dengan tingkat bunga 10% per tahun, adalah (dengan rumus)...

$$
\begin{aligned}
P &= 1.000 \times \frac{(1+10\%)^4 - 1}{(1+10\%)^4 \times 10\%} \\
&= 1.000 \times \frac{0,4641}{0,1464} \\
&= 3.170
\end{aligned}
$$

- Jika jumlah uang dan/atau tingkat bunga berubah-ubah, rumus tersebut tidak dpt digunakan (hrs dihitung satu per satu dgn rumus nilai sekarang)

Anuitas – Angsuran Hutang

- Anuitas – angsuran hutang (*A*) = pembayaran yang diperlukan selama *n* periode pada tingkat bunga *i* per periode untuk mengangsur sejumlah uang atau hutang yang diperoleh sekarang
- Rumus:

$$A = P \times \boxed{\frac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1}}$$

Mortgage constant (MC)

- Digunakan dlm perhitungan KPR – utk menghitung jumlah angsuran + bunga per periode

Anuitas – Angsuran Hutang

- Diterima fasilitas KPR sebesar Rp 1.000.000.000,- dengan tingkat suku bunga KPR 10% p.a dengan jangka waktu 10 tahun. Berapakah besarnya cicilan per tahun?

Anuitas – Angsuran Hutang

- Besarnya cicilan per **tahun**

$$A = 1.000.000.000\ x\ \frac{(1+10\%)^{10}\ X\ 10\%}{(1+10\%)^{10} - 1}$$

$$= \mathbf{1.000.000.000}\ x\ \frac{0.25937}{1.59374}$$

= 1.000.000.000 x 0.162745

= Rp. 162.745.395,- per tahun

Anuitas – Cadangan Penggantian

- Anuitas – cadangan penggantian (*A*) = jumlah yang harus diinvestasikan tiap periode pada tingkat bunga *i* untuk mencapai jumlah yang diinginkan pada akhir periode *n*
- Rumus:

$$A = S_n \times \boxed{\frac{i}{(1+i)^n - 1}}$$

Sinking fund factor (SFF)

- Digunakan dlm penilaian dengan pendekatan pendapatan – untuk menghitung cadangan penggantian

Anuitas – Cadangan Penggantian

- Manajemen sebuah hotel memutuskan untuk melakukan penggantian komponen lift/ elevator setiap 7 tahun, dengan estimasi biaya Rp 100.000.000,-. Saat ini besarnya bunga deposito adalah 5% p.a. Berapakah besarnya *reserve for replacement* yang harus dicadangkan manajemen tiap tahun?

Anuitas – Cadangan Penggantian

- Besarnya dana pencadangan per tahun

$$A = Sn\ x \frac{5\%}{(1+5\%)^7 - 1}$$

$$= \mathbf{100.000.000}\ \mathrm{x} \frac{0.05}{0.4071}$$

$$= 100.000.000 \text{ x } 0.12282$$

= Rp. 12,282.000- per tahun

Kasus 1

- Berapa jumlah nilai kini atas pendapatan yang diperoleh diakhir tahun pertama sebesar Rp 300 juta , akhir tahun ke dua Rp 400 juta dan akhir tahun ke tiga Rp 500 juta , bila suku bunga deposito diasumsikan akan tetap selama 3 tahun yaitu sebesar 12 % .

Kasus 2

- Bila setiap tahun uang yang pasti akan kita diterima adalah Rp 10.000.000,00 , selama kita hidup , berapa nilai uang tersebut kalau kita terima saat ini. Bila bunga atas obligasi pemerintah adalah 10 % .

- Bila setiap tahun uang yang mungkin akan kita diterima adalah Rp 10.000.000,00 , selama kita hidup , berapa nilai uang tersebut kalau kita terima saat ini? Bila bunga atas obligasi pemerintah adalah 10 % sedang resiko atas tidak tercapainya jumlah tersebut diperkirakan sebesar 4 %

Kasus 3

- Seseorang akan membeli tanah dengan 4 (empat) pilihan pembayaran sebagai berikut :
  1. Dibayar tunai saat ini sebesar Rp 1,5 Milyar
  2. Dibayar 3 tahun mendatang sebesar Rp 2,4 Milyar .
  3. Dibayar cicilan dengan cicilan tahun pertama Rp 500 juta , tahun kedua Rp 750 juta , tahun ketiga Rp 1 milyar (dibayar diakhir tahun).
  4. Dibayar cicilan dengan cicilan tetap diawal tahun selama 3 tahun , sebesar Rp 600 juta

  Bila bunga deposito diasumsikan 18 % per tahun , mana diantara cara pembayaran diatas yang dipilih.

  (catatan: sifat investasi tanah diabaikan) .

Kasus 4

- Nilai tanah saat ini bernilai Rp 250.000.000,00 , kenaikan nilai tanah pertahun adalah 8 % . Berapa tahun Nilai tanah itu menjadi Rp 630.000.000,00 ?

Jawaban Kasus No. 4

$$250.000.000 \times (1 + 8\%)^n = 630.000.000$$

$$1{,}08^n = \frac{630.000.000}{250.000.000}$$

$$1{,}08^n = 2{,}52$$

$$a^c = b \Leftrightarrow {}^a\log b = c$$

$$n = {}^{1,08}\log 2{,}52$$

$$n = \frac{\log 2{,}52}{\log 1{,}08}$$

$${}^a\log b = \frac{\log b}{\log a}$$

$$n = \frac{0{,}401401}{0{,}033424}$$

$$n \approx 12$$

Daftar Referensi

1. Appraisal Institute, *The Appraisal of Real Estate*, 14th edition, 2013.
2. Standar Penilaian Indonesia (SPI) Edisi VII, 2018.